



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

- (1) أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.
ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

- (3) اكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ واحسب عندئذ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثتين A و B حيث: A : " سحب كريتين من نفس اللون " ، B : " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " .

(1) بين أن احتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B .

(2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال أن تحملان نفس الرقم؟

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z-i)(z^2 - 4z + 5) = 0$



II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B

و C التي لاحقاتها $i, 2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

(1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$

أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)| = \frac{1}{2}$

ب) بيّن أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب.

(3) نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عين لاحقة D صورة B بالدوران r وبيّن أن النقط A, D و C في استقامية.

ب) استنتج أن D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانيا.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ وشكل جدول تغيراتها.

(3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية التيبيرية "ln" في المعلم السابق.

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ) .

(4) ارسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

(5) H الدالة المعرفة على المجال $]3; +\infty[$ بـ : $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما.

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، عين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

ب) احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل

والمستقيمين ذوي المعادلتين: $x=3$ و $x=4$.

(6) g الدالة المعرفة على $]-1; 0[\cup]-1; -\infty[$ بـ : $g(x) = f(-2x)$.

دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها.

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 والكرات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائياً وفي آنٍ واحدٍ ثلاث كريات من الصندوق.
- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة.
- (1) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.
 - (2) بيّن أنّ احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقماً زوجياً هو $\frac{7}{24}$.
 - (3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع.
- ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علماً أن جداءهما زوجي؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- f الدالة المعرفة على المجال $[4; 7]$ بـ: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$.
- (1) أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[4; 7]$.
 - ب) استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فإنّ $f(x) \in [4; 7]$.
 - (2) برهن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فإنّ $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$.
 - ثمّ استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7]$ فإنّ $f(x) - x > 0$.
 - (3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$.
 - ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ بيّن أنّها متقاربة.
 - (4) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$.
 - ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثمّ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث:
- $$z_C = -2z_A \text{ و } z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$
- (1) أ) اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسّي.
 - ب) احسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.



- (2) أ) الانسحاب الذي يحوّل A إلى C ، عيّّن z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T .
 ب) استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.
 (3) اكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسّي.
 (4) جد قيم العدد الطّبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.
 (5) لتكن M نقطة كَيْفِيّة من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C .
 عيّّن (E) مجموعة النّقط M التي من أجلها يكون $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تُؤخذ وحدة الطول $2cm$

$(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

- (1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .
 ب) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.
 (2) ادرس اتجاه تغير الدالة f .
 (3) احسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ؛ ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .
 (4) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ على $\mathbb{R}$.
 (5) ارسم على المجال $[0; 2]$ المنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يُعطى $e^2 - 2e \approx 2$)
 (6) احسب بالسنتمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$.
 (7) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
 أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.
 ب) من أجل $x \in [0; 2]$ احسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقاً من $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسمه.

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)								
مجم	مجزأة									
04	0.75×2	التمرين الأول: (04 نقاط) (1) أ) تبيان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$: ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج تقاربها : (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة (2) إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية وتعيين أساسها وحدها الأول : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = -\ln 5$ حدها الأول v_0 : $v_0 = \ln(12)$ (3) كتابة v_n بدلالة n : $v_n = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$ تبين أن $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ (4) تبيان أن : $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$								
	0.50									
	0.50									
	0.25									
	0.25									
	0.25									
	0.25									
	0.25									
	0.25									
3.75	01	التمرين الثاني: (04 نقاط) (1) تبيان أن : $P(A) = \frac{31}{66}$								
	01	$P(B) = \frac{17}{33}$								
	0.25	(2) احتمال أن تحملا نفس الرقم : $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{15}{31}$								
	0.25×3	(3) أ) قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :								
	0.25×3	<table><tr><td>x_i</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>$\frac{10}{66}$</td><td>$\frac{35}{66}$</td><td>$\frac{21}{66}$</td></tr></table>	x_i	3	4	5	$P(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{21}{66}$
	x_i	3	4	5						
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{21}{66}$							
0.25	الأمل الرياضي $E(X) = \frac{275}{66}$									

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
05		التمرين الثالث: (05 نقاط)
	0.5×3	1. حلول المعادلة هي : $2+i$, $2-i$, i
	0.75	 (1.11) $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
	0.50	المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.....
	0.75	(2) - أ) (E) هي محور القطعة [BC]
	0.75	- ب) $f(i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ و $[f(i)]^{1440} \in \mathbb{R}^+$
	0.5	(3) - أ) $z_D = 4+i$ و $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_D} = -1$ أي $\overline{CD} = -\overline{CA}$. النقط في استقامية.....
	0.25	- ب) D هي صورة A بتحريك مركزه C ونسبته -1 أو بدوران مركزه C وزاويته π أو بتناظر مركزي بالنسبة لـ C أو بتشابه مباشر نسبته 1 مركزه C وزاويته π
2.5		التمرين الرابع: (07 نقاط)
	0.5×3	(1) أ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
	0.25×2	التفسير الهندسي: $x=0$ و $x=2$ معادلتين للمستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)
	0.5	- ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
01.75	0.5	(2) اتجاه تغير الدالة f : لدينا $f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}$
	0.50	إشارة $f'(x)$
	3×0.25	f متزايدة تماما على كل من المجالين: $[4; +\infty[$ و $]0; 1]$ و f متناقصة تماما على كل من المجالين $[1; 2]$ و $]2; 4]$ وتشكيل جدول التغيرات
0.75	0.5	(3) أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = 0$
	0.25	التفسير البياني: (Γ) منحنى مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
0.5	0.5	- ب) وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ) : لدينا $f(x) - \ln x = \frac{1}{x-2}$
		إذن: على المجال $]0; 2[$: (C_f) يقع تحت (Γ) وعلى المجال $]2; +\infty[$: (C_f) يقع فوق (Γ).
0.5	0.5	(4) الرسم.....

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة	
0.5	0.25	(5) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة نجد : $H(x) = \int_3^x (\ln t) dt = -x + 3 + x \ln x - 3 \ln 3$.
	0.25	ب) المساحة $\mathcal{A} = (-1 + 9 \ln 2 - 3 \ln 3)$ (u.a).
0.5	0.25	(6) الدالة المعرفة على المجموعة $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$ ب : $g(x) = f(-2x)$.
	0.25	$g'(x) = -2f'(-2x)$ الدالة g متناقصة على $]-\infty; -2[\cup]-\frac{1}{2}; 0[$ ومتزايدة على $]-2; -1[\cup]-1; \frac{-1}{2}[$

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
التمرين الأول: (04 نقاط)		
02.5	0.5	(1) عدد الامكانيات هو 120 ،
	01.5	قانون الاحتمال: . قيم X هي 0،1، 2 ، 4 ، 8 مع احتمالاتها
	0.50	الامل الرياضي هو $\frac{231}{120}$
01	01	(2) احتمال الحصول على 3كریات تحمل كل منها رقما زوجيا $\frac{7}{24}$
0.5	0.25×2	(3) احتمال الحصول على كرتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أن الجداء زوجي هو $\frac{1}{2}$
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
01.25	0.75	(1 أ) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7]$.
	0.5	ب) من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[4;7]$ يكون: $f(x) \in [4;7]$
0.75	0.75	(2) $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{\sqrt{x+2} + x - 4}$ ومن أجل كلّ x من المجال $[4;7]$: $f(x) - x > 0$.
01.25	0.75	(3 أ) برهان بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $4 \leq u_n < 7$.
	0.25 0.25	ب) لدينا: $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ إذن: $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه : (u_n) متزايدة تماما. (u_n) متقاربة.
0.75	0.25	(4 أ) برهان أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$.
	0.25	ب) استنتاج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n < \frac{3}{4^n}$ ،
	0.25	و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$ حسب مبرهنة الحصر .
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
01.5	01	(1 أ) الشكل الآسي لـ z_A .
	0.5	ب) حساب $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$
01.5	0.75	(2 أ) حساب z_D صورة B بواسطة T
	0.75	ب) الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.
0.75	0.75	(3) الشكل الأسّي للعدد المركب $z_C - z_A$ هو $6\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
0.5	0.5	(4) لدينا $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n = e^{-in\frac{\pi}{3}}$ عدد حقيقي يعني أن: $n = -3k$ حيث $k \in \mathbb{Z}_-$. $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
0.75	0.75	(5) نقطة كيفية من المستوي لاحقها z تختلف عن A و C. (E) هي المستقيم (AC) باستثناء القطعة المستقيمة $[AC]$ أي أن $(E) = (AC) - [AC]$
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
02	0.5×2	(1) أ) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g: ليكن $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = e^x - e$
	0.5×2	ب) الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى: لدينا $g(1) = e^1 - e = 0$ اذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$
01	0,50	(2) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f: ليكن $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^x - ex = g(x)$
	0,50	لدينا $f'(1) = g(1) = 0$ ومن أجل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ أي $g(x) > 0$ أي $f'(x) > 0$ إذاً الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.
0.75	0.25	(3) حساب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}ex^2 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ لأنّ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{1}{2}ex^2 = -\infty$
	0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ لأنّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}e \right) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$
	0.25	جدول التغيرات
0.50	0,50	(4) دراسة الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g). ليكن $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - g(x) = ex \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right)$
0.75	0,75	(C_g) تحت (C_f) : $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ (C_g) فوق (C_f) : $x \in]0; 2[$ (C_g) و (C_f) متقاطعان : $x \in \{0; 2\}$
0.50	0.25	(5) الرسم : (C_f)
	0.25	(C_g)

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة	
0.5	0.25	6) حساب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_g) و (C_f). $A = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}ex^2 + ex \right) dx = \left[-\frac{1}{6}ex^3 + \frac{1}{2}ex^2 \right]_0^2$ $A = -\frac{8e}{6} + \frac{4e}{2} = -\frac{4e}{3} + 2e = \frac{2e}{3} ua$
	0.25	$A = \frac{8e}{3} cm^2$
01	0.25	7) أ) دالة زوجية.....
	0.25	ب) حساب $h(x) + f(x)$
	0.25	استنتاج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من (C_f)
	0.25	الرسم.....